绝密★启用前

2016年3月湖北省七市（州）教科研协作体高三联合考试

理科数学试题答案及评分参考

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4. 只给整数分数. 选择题不给中间分.

一、选择题

（1）D （2）A （3）A （4）B （5）C （6）A

（7）B （8）C （9）C （10）B （11）B （12）D

二、填空题

（13）$\dfrac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ （14）2

（15）$10\sqrt{39}$ （16）$1-\dfrac{2\pi}{9}$

三、解答题

（17）解：

（Ⅰ）设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q．由已知可得

$$\begin{cases}1+d=q,\\2(1+2d)-q^2=1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}1+d=q,\\q^2-4q+3=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}d=0,\\q=1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}d=2,\\q=3.\end{cases}$$

从而$a_n=b_n=1$或$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$.

6分

（Ⅱ）（1）当$a_n=b_n=1$时，$c_n=1$，所以$S_n=n$；

（2）当$a_n=2n-1$，$b_n=3^{n-1}$时，$c_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$，

$S_n=1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+7\cdot 3^3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$，

$3S_n=3+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+7\cdot 3^4+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$，从而有

$$(1-3)S_n=1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$=1+2(3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$=1+2\cdot\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$=-2(n-1)\cdot 3^n-2,$$

故 $S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

综合（1）（2），$S_n=n$ 或 $S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.　　6 分

（18）**解**：

利用分层抽样从 1000 人中抽取 10 人，

发放 100 元优惠券的购物者有：$10\times(1.5+2.5+3)\times 0.1=7$ 人，

发放 200 元优惠券的购物者有：$10\times(2+0.8+0.2)\times 0.1=3$ 人.　　4 分

则此 3 人所获优惠券的总金额 X 的可能取值有：300, 400, 500, 600，且

$P(X=300)=\frac{C_7^3C_3^0}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}$，$P(X=400)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}$，

$P(X=500)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}$，$P(X=600)=\frac{C_7^0C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$.

于是，X 的分布列为：

X	300	400	500	600
P	$\frac{35}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{1}{120}$

均值为 $E(X)=300\times\frac{35}{120}+400\times\frac{63}{120}+500\times\frac{21}{120}+600\times\frac{1}{120}=390$.

8 分

（19）（解法 1）

（Ⅰ）证明：如图 1，取 SD 的中点 G，连接 GF，GA.

因为 G, F 分别是 SD，SC 的中点，所以 $GF\ /\!/\ DC$，且 $GF=\frac{1}{2}DC$.

又底面 $ABCD$ 为正方形，且 E 是 AB 的中点，所以 $AE\ /\!/\ DC$，且 $AE=\frac{1}{2}DC$.

于是 $AE\ /\!/\ GF$，且 $AE=GF$，所以 $AEFG$ 是平行四边形，所以 $EF\ /\!/\ AG$.

又 $EF\not\subset$ 平面 SAD，$AG\subset$ 平面 SAD，故 $EF\ /\!/$ 平面 SAD.

6 分

（Ⅱ）如图 2，取 AG, EF 的中点分别为 M, N，连接 DM, MN, DN.

因 $SD=2DA=2DG$，得 $DA=DG$，又 M 是 AG 的中点，所以 $DM\perp AG$.

又因为 $SD \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $SD \perp AB$，由底面 $ABCD$ 为正方形，可得 $AB \perp AD$；

而 $SD \cap AD = D$，所以 $AB \perp$ 平面 SAD， 又 M，N 分别为 AG， EF 的中点，

则 $MN \parallel AB$，所以 $MN \perp$ 平面 SAD，又 $AG \subset$ 平面 SAD，则 $MN \perp AG$.

由于 $DM \cap MN = M$，所以 $AG \perp$ 平面 MND.

又由（Ⅰ）知， $EF \parallel AG$，故 $EF \perp$ 平面 MND，

因此 $\angle MND$ 是二面角 $A-EF-D$ 的平面角.

设 $DA = 2$，由 $SD = 2DA = 2DG$，得 $DG = 2$． $DM = \sqrt{2}$， $MN = \frac{1}{2}AB = 1$，

又 $MN \perp$ 平面 SAD， $DM \subset$ 平面 SAD，得 $MN \perp DM$，所以 $DN = \sqrt{3}$，

从而 $\cos\angle MND = \frac{MN}{DN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，故所求二面角 $A-EF-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6 分

（解法 2）

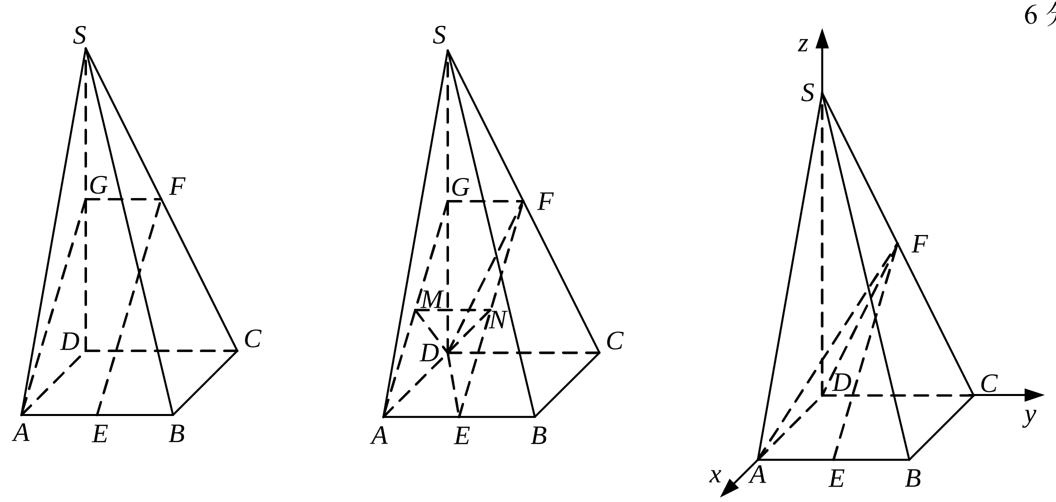
以 D 为原点，射线 DA, DC, DS 分别为 x, y, z 的正半轴建立空间直角坐标系，

（Ⅰ）设 $AB = 2a$， $SD = 2b$，则 $E(2a, a, 0)$， $S(0, 0, 2b)$， $C(0, 2a, 0)$，所以 $F(0, a, b)$，

$\overrightarrow{EF} = (-2a, 0, b)$， $\overrightarrow{DC} = (0, 2a, 0)$，于是 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC} = (0, 2a, 0) \cdot (-2a, 0, b) = 0$.

则 $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DC}$. 又 $\overrightarrow{DC}$ 是平面 SAD 的一个法向量，所以 $EF \parallel$ 平面 SAD.

6 分



第 19 题解答图 1　　第 19 题解答图 2　　第 19 题解答图 3

（Ⅱ）设 $DC=2$，有 $SD=2DC=4$，则 $D(0,0,0,)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$S(0,0,4)$，$E(2,1,0)$，$F(0,1,2)$，则 $\overrightarrow{DE}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{DF}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(-2,0,2)$.

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DE}\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DF}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}2x+y=0,\\ y+2z=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(1,-2,1)$.

同理可得面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$，所以 $\cos\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故所求二面角 $A-EF-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6 分

（20）**解：**

（Ⅰ）由 $x^2+y^2+2x-15=0$，得 $(x+1)^2+y^2=4^2$，所以圆心为 $H(-1,0)$，半径为 4.

连接 MA，由 l 是线段 AB 的中垂线，得 $|MA|=|MB|$，

所以 $|MA|+|MH|=|MB|+|MH|=|BH|=4$，又 $|AH|=2<4$.

根据椭圆的定义可知，点 M 的轨迹是以 A, H 为焦点，4 为长轴长的椭圆, 其方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，即为所求曲线 C 的方程.

4 分

（Ⅱ）由直线 EF 与直线 PQ 垂直，可得 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，于是

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

（1）当直线 PQ 的斜率不存在时，则直线 EF 的斜率为零，此时可不妨取

$P(1,\dfrac{3}{2})$，$Q(1,-\dfrac{3}{2})$，$E(2,0)$，$F(-2,0)$，

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=(1,-\dfrac{3}{2})\cdot(-3,\dfrac{3}{2})=-3-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{21}{4}$.

（2）当直线 PQ 的斜率为零时，则直线 EF 的斜率不存在，同理可得 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=-\dfrac{21}{4}$.

（3）当直线 PQ 的斜率存在且不为零时，则直线 EF 的斜率也存在，于是可设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$，则直线 EF 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$.

将直线 PQ 的方程代入曲线 C 的方程，并整理得

$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，所以 $x_P+x_Q=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_P\cdot x_Q=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$.于是

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(x_P-1)(x_Q-1)+y_P\cdot y_Q=(1+k^2)[x_Px_Q-(x_P+x_Q)+1]$$

$$=(1+k^2)(\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-\frac{8k^2}{3+4k^2}+1)=-\frac{9(1+k^2)}{3+4k^2}.$$

将上面的 k 换成 $-\dfrac{1}{k}$，可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=-\dfrac{9(1+k^2)}{4+3k^2}$. 所以

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=-9(1+k^2)(\frac{1}{3+4k^2}+\frac{1}{4+3k^2})$.

令$1+k^2=t$，则$t>1$，于是上式化简整理可得

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}=-9t(\frac{1}{4t-1}+\frac{1}{3t+1})=-\frac{63t^2}{12t^2+t-1}=-\frac{63}{\frac{49}{4}-(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2}$.

由$t>1$，得$0<\frac{1}{t}<1$，所以$-\frac{21}{4}<\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}\le-\frac{36}{7}$.

综合（1）（2）（3）可知，所求$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{QF}$的取值范围为$[-\frac{21}{4},-\frac{36}{7}]$.

8 分

（21）解：

（Ⅰ）$f'(x)=-8\sin x+12\sin 2x-4\sin 4x=8\sin x(-1+3\cos x-2\cos x\cos 2x)$

$=8\sin x(-4\cos^3 x+5\cos x-1)=8\sin x(1-\cos x)(4\cos^2 x+4\cos x-1)$.

当$x\in(0,\frac{\pi}{3})$时，得$\sin x>0$，$1-\cos x>0$，由$\cos x>\frac{1}{2}$，得$4\cos^2 x+4\cos x-1>0$，

故$f'(x)>0$，即$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{3})$上单调递增.

又$f(0)=3$，故得$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{3})$上的最小值是 3.

4 分

（Ⅱ）设函数$g(x)=\frac{4}{3}\sin x-\frac{1}{6}\sin 2x-x$，

当$x\in(0,\frac{\pi}{3})$时，$g'(x)=\frac{4}{3}\cos x-\frac{1}{3}\cos 2x-1=-\frac{2}{3}(\cos x-1)^2<0$，

故$g(x)$在$[0,\frac{\pi}{3})$上单调递减，得$g(x)<g(0)=0$，即$\frac{4}{3}\sin x-\frac{1}{6}\sin 2x<x$.　①

设函数$h(x)=\frac{8}{3}\sin x-\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 4x-x$，

$h'(x)=\frac{8}{3}\cos x-2\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 4x-1=\frac{1}{3}f(x)-1$.

当$x\in(0,\frac{\pi}{3})$时，由（Ⅰ）知$f(x)>3$，得$h'(x)>0$，故$h(x)$在$[0,\frac{\pi}{3})$上单调递增，得

$h(x)>h(0)=0$，即$\frac{8}{3}\sin x-\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 4x>x$.　②

综合①②得，当$x\in(0,\frac{\pi}{3})$时，有

$\frac{4}{3}\sin x-\frac{1}{6}\sin 2x<x<\frac{8}{3}\sin x-\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 4x$.　③

4 分

（Ⅲ）（1）在③中，令$x=\frac{\pi}{n}$，得

$\frac{4}{3}\sin\frac{\pi}{n}-\frac{1}{6}\sin\frac{2\pi}{n}<\frac{\pi}{n}<\frac{8}{3}\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{2\pi}{n}+\frac{1}{12}\sin\frac{4\pi}{n}$，

即$\dfrac{4}{3}n\sin\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{n}{6}\sin\dfrac{2\pi}{n}<\pi<\dfrac{8}{3}n\sin\dfrac{\pi}{n}-n\sin\dfrac{2\pi}{n}+\dfrac{n}{12}\sin\dfrac{4\pi}{n}$，

易知$S_n=\dfrac{n}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}$， $S_{2n}=n\sin\dfrac{\pi}{n}$， $S_{\frac{n}{2}}=\dfrac{n}{4}\sin\dfrac{4\pi}{n}$，

即得$\dfrac{4}{3}S_{2n}-\dfrac{1}{3}S_n<\pi<\dfrac{8}{3}S_{2n}-2S_n+\dfrac{1}{3}S_{\frac{n}{2}}$. ④

（2）易得 $S_6=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},S_{12}=3$．在④中令$n=12$，得

$\pi>\dfrac{4}{3}S_{24}-\dfrac{1}{3}S_{12}>\dfrac{4}{3}\times3.105-\dfrac{1}{3}\times3=3.14$，

$\pi<\dfrac{8}{3}S_{24}-2S_{12}+\dfrac{1}{3}S_6<\dfrac{8}{3}\times3.106-2\times3+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\times1.733<3.15$.

综上得$3.14<\pi<3.15$. 4分

（22）解：

（Ⅰ）证明：由FG是圆的切线，FDA是圆的割线，所以$FG^2=FD\cdot FA$，

又$FE=FG$，所以$FE^2=FD\cdot FA$，即$\dfrac{FE}{FD}=\dfrac{FA}{FE}$，

又$\angle EFD=\angle AFE$，有$\Delta EFD\backsim\Delta AFE$，故$\angle DEF=\angle EAF$.

又$\angle DAB$和$\angle DCB$都是弧DB上的圆周角，有$\angle DEF=\angle EAF=\angle DCB$，

所以，$FE\parallel BC$.

5分

（Ⅱ）由$AB\perp CD$，得$\angle AED=90^\circ$，

有$\angle EAD=\angle DEF=30^\circ$，故$\dfrac{ED}{AE}=\tan30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\dfrac{AF}{FG}=\dfrac{AF}{FE}=\dfrac{AE}{ED}=\sqrt{3}.$

5分

（23）解：

（Ⅰ）曲线C_1的普通方程为$y=x^2,x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，直线$l$的普通方程为$x+y=2$，

联立$\begin{cases}y=x^2,\\x+y=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=4\end{cases}$（舍去），

故直线l与曲线C_1的交点的直角坐标为$(1, 1)$，其极坐标为$(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$.

5分

（Ⅱ）曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2+2ax-2ay=0$，即

$(x+a)^2+(y-a)^2=2a^2(a>0)$.

由直线 l 与 C_2 相切，得 $\dfrac{|-a+a-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a$，故 $a=1$.

5 分

（24）解：

（Ⅰ）由于 $a=1$，故 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ x-1, & x\ge 1.\end{cases}$

当 $x<1$ 时，由 $f(x)\ge\dfrac{1}{2}(x+1)$，有 $1-x\ge\dfrac{1}{2}(x+1)$，解得 $x\le\dfrac{1}{3}$；

当 $x\ge 1$ 时，$f(x)\ge\dfrac{1}{2}(x+1)$，有 $x-1\ge\dfrac{1}{2}(x+1)$，解得 $x\ge 3$.

综上，不等式 $f(x)\ge\dfrac{1}{2}(x+1)$ 的解集为 $(-\infty,\dfrac{1}{3}]\cup[3,+\infty)$.

5 分

（Ⅱ）当 $a<2$ 时，$g(x)=\begin{cases}a-2, & x\le a,\\ 2x-2-a, & a<x<2,\\ 2-a, & x\ge 2.\end{cases}$ $g(x)$ 的值域 $A=[a-2,\ 2-a]$.

由 $A\subseteq[-1,3]$，得 $\begin{cases}a-2\ge -1,\\ 2-a\le 3,\end{cases}$ 解得 $a\ge 1$，又 $a<2$，故 $1\le a<2$；

当 $a\ge 2$ 时，$g(x)=\begin{cases}a-2, & x\le 2,\\ 2x-2-a, & 2<x<a,\\ 2-a, & x\ge a.\end{cases}$ $g(x)$ 的值域 $A=[2-a,\ a-2]$.

由 $A\subseteq[-1,3]$，得 $\begin{cases}2-a\ge -1,\\ a-2\le 3,\end{cases}$ 解得 $a\le 3$，又 $a\ge 2$，故 $2\le a\le 3$.

综上，所求 a 的取值范围为[1，3].

5 分